Arbitraje intertemporal y valoración Markov de las acciones*

Darrell Duffie [1]

Mark B. Garman

Este trabajo explora la naturaleza intertemporal del arbitraje y su conexión con los procesos de Markov. Suponemos que una economía está en uno de los conjuntos fijos Ω de posibles estados en cada fecha. Suponiendo que los precios y dividendos se describen como funciones del estado de la economía en cada fecha y que están libres intertemporalmente de arbitraje, construimos el proceso de Markov correspondiente bajo el cual el valor de mercado vigente de cualquier acción es el valor esperado de sus dividendos futuros, dado el estado actual del proceso Markov. Analizamos un ejemplo de equilibrio usando análisis de transformaciones z.

Palabras clave: arbitraje, impaciencia, proceso de Markov, transformación z.

1. **Introducción**

Este trabajo mejora la teoría de Harrison-Kreps sobre las economías espacio-estado. En principio, Harrison y Kreps (1979) demostraron que la ausencia de arbitraje intertemporal implicaba la existencia de un numerario y una elección de creencias de probabilidad (llamada medida de martingala) bajo la cual el precio de cualquier acción en cualquier momento podía considerarse como su pago futuro esperado condicionado. En un marco de espacio-estado, es decir, en una economía en donde los precios y dividendos de las acciones en cada momento son función de un proceso de estados de Markov X, la sustitución de la medida de martingala de Harrison-Kreps puede destruir la propiedad Markov de X. En realidad, si los mercados son incompletos y el problema no es trivial, existe una colección infinita de medidas de martingala, muchas de las cuales destruyen la propiedad de Markov. Sin embargo, en este trabajo demostraremos que siempre hay cuando menos una medida martingala que preserva la propiedad de Markov. También demostraremos que es posible, y analíticamente más conveniente, evitar el cambio de numerario intertemporal de Harrison y Kreps, convirtiendo X en un proceso sub-Markov cuyas probabilidades terminales consideran el descuento temporal.

Ross (1973) [2] ha sugerido un teorema de representación fundamental para mercados libres de arbitraje. La formulación básica puede resumirse en el marco estándar de un período (o sea, dos fechas) usando la notación siguiente. Sea

---

* Traducción de Enriqueta Aragonés.

[1] Duffie pertenece a la Graduate School of Business, Stanford University, Stanford, CA., 94305. Garman pertenece al Department of Business Administration, University of California, Berkeley, CA. 94720. Parte de esta investigación se llevó a cabo mientras Duffie visitó el Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, California, auspiciado bajo una beca del NSF SES-851335 y SES-8420114. Queremos agradecer las valiosas conversaciones sostenidas con W. Shafer.

[2] Parece que Ross ha sido el primero en reconocer que la noción de hiperplano-separador es un aspecto esencial para la caracterización de no arbitraje; véase también el trabajo precursor de Beja (1967) y (1971). Ross (1978) ofrece una exposición mucho más desarrollada de las ideas básicas.

p_j = el precio en el período cero de la acción j, $j = 1, 2, \ldots, J$ y
$a_{sj} = p_{sj} + d_{sj}$ = al pago de la acción j en el período 1 si el estado prevaleciente es s, $s = 1, 2, \ldots S$, donde p_{sj} y d_{sj} son los precios y dividendos condicionados, respectivamente, en el período 1.

Una versión de la condición de no arbitraje es:

No Arbitraje, Un Período. No existe ninguna cartera x_j tal que

$$\sum_j x_j p_j < 0$$

y

$$\text{(NA-1P)} \qquad \sum_j x_j a_{sj} \geqslant \text{ para todos los estados } s = 1, 2, \ldots, S$$

donde x_j no está restringida.

El resultado de representación de Ross establece que existe un conjunto no negativo de números $\{k_s\}$, *independiente* de j tal que

$$\text{(R-1P)} \qquad p_j = \sum_{sj} k_s a_{sj}$$

si y sólo si (NA-1P) se cumple. Esencialmente, esta conclusión racionaliza la existencia de una estructura de precios explícita (tipo Arrow-Debreu [3]) $\{k_s\}$ incluso cuando los mercados son incompletos, es decir, cuando la matriz $[a_{sj}]$ es de un rango menor a S. (Está claro que si $[a_{sj}]$ es de rango S, las cantidades $\{k_s\}$ están determinadas únicamente por precios y pagos (exógenos); en cualquier otro caso éstas no son únicas).

Rubinstein (1976) y otros [4] han utilizado, subsecuentemente, una versión de flujo de dividendos del paradigma de no arbitraje. En este enfoque se supone un número infinito de períodos, y el estado en el período t se representa por $s(t)$. En esta notación está implícito que el conjunto de posibles estados es uniforme para cada período; con una ligera pérdida de generalidad [5] esto siempre es posible simplemente incluyendo el tiempo en la definición de «estado». En este contexto, la condición de no arbitraje es la siguiente:

No Arbitraje, Flujo de Dividendos. No existe ninguna cartera x_j tal que

---

[3] Si los mercados de activos son completos, la estructura de precios implícita será idéntica a los precios Arrow-Debreu para los correspondientes títulos contingentes a cada estado; si los mercados son incompletos, entonces los precios también incluirán un cierto multiplicador de Lagrange que refleja los costos de oportunidad asociados con la incapacidad de asegurar distintos patrones de pagos.

[4] Véase, por ejemplo, Cox y Ross (1976).

[5] Se pueden construir ejemplos en los cuales la dimensión del espacio de estados se expande «muy rápidamente» a medida que el tiempo pasa; en estos ejemplos podría no ser posible establecer un «super-conjunto» de estados que se aplique relativamente bien a cada fecha individual.

$$\sum_j x_j p_j < 0$$

y

(NA-DS) $\sum_j x_j d_{s(t)j} \geqslant 0$ para todos los estados $s(t)$ en todos los períodos $t = 1, 2 \ldots$

con x_j no restringida y donde $d_{s(t)j}$ es el dividendo condicionado al estado del activo j en el período t.

El correspondiente teorema de representación parece [6] estar dado por

(R-DS) $$p_j = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{s(t)} k_{ts(t)} d_{s(t)j}, \quad k_{ts(t)} \textit{ no-negativo}$$

en donde las cantidades $k_{ts(t)}$ son análogas a la «estructura temporal» de los precios implícitos (Arrow-Debreu). (Sin embargo, estas cantidades no necesariamente tienen todas las propiedades que debe poseer una «estructura temporal», como demostraremos más adelante, véase el ejemplo 1.)

Una crítica al teorema de representación mencionado antes es que no considera las posibilidades de arbitraje asociadas a los mercados de futuros. En consecuencia, Garman (1977) y otros [7] han reformulado el problema de arbitraje como

No Arbitraje, Mercados de Futuros. No existe ninguna cartera x_j y un período futuro τ tal que

$$\sum_j x_j p_j < 0,$$

$\sum_j x_j d_{s(t)j} \geqslant 0$ para todos los estados s(t) y períodos $t = 1, 2 \ldots, \tau$

y

(NA-FM) $\sum_j x_j \{p_{s(\tau)j} + d_{s(\tau)j}\} \geqslant 0$, para todos los estados $s(\tau)$.

[Observe que una solución a (NA-FM), si existe, dependerá, en general, de la fecha futura τ.]. Así, el teorema de representación correspondiente es

[6] Desafortunadamente el lema de Farkas no se cumple en general por un conjunto infinito de restricciones. Así, en la parte técnica, el teorema de representación de Rubinstein no es una condición suficiente para establecer el resultado dado. Sin embargo, este hecho tiene pocas implicaciones prácticas, ya que los contraejemplos al teorema parecen estar limitados a un conjunto de casos «en el filo de la navaja». Con fines prácticos, podríamos aceptar el resultado de representación como el resultado de una definición más profunda de «arbitraje», tal como lo ha hecho Kreps (1981).

[7] Garman y Ohlison (1980).

$$\text{(R-FM)} \quad p_j = \sum_{t=1}^{\tau-1} \sum_{s(t)} k_{ts(t)} d_{s(t)j} + \sum_{s(\tau)} k_{\tau(s)\tau} \{p_{s(\tau)j} + d_{s(\tau)j}\}, \text{ para } \tau = 1, 2, \ldots$$

en donde las cantidades $\{k_{s(t)t}\}$ son no-negativas.

A pesar de que inicialmente estos dos teoremas de representación parecen ser verdaderamente intertemporales, no lo son ya que ninguno considera la ausencia de arbitraje como un aspecto *continuo* de la economía. En otras palabras, la condición de no arbitraje debe aplicarse a todas las elecciones de períodos y estados presentes así como a períodos y estados futuros. Este hecho tiene implicaciones adicionales y es nuestro propósito desarrollarlas en este trabajo.

El resto del trabajo se organiza de la siguiente manera. En la sección 2 describimos la economía y definimos la ausencia de arbitraje intertemporal. Dejando de lado el arbitraje intertemporal, construimos una familia de matrices que satisfacen la propiedad de evolución (o Chapman-Kolmogorov) que juega el papel de precios de estado implícitos entre los períodos. En la sección 3 construimos un proceso de Markov cuyos operadores de transición son las matrices de precios de estado implícitos de la sección 2. Bajo este proceso de Markov el valor de mercado vigente de cualquier activo es el valor esperado condicionado de sus dividendos futuros, dado el valor presente del proceso de Markov. En la sección 4 aplicamos la teoría de transformaciones-z para obtener soluciones analíticas para los precios de los activos en el caso de tiempo homogéneo. La sección 5 extiende el análisis al caso de horizonte infinito. La sección 6 presenta un ejemplo completo de equilibrio parecido al presentado por Lucas (1978). La extensión a un espacio de estados más general se hace en la sección 7, mientras que en la sección 8 se presentan algunas conclusiones.

2. Arbitraje intertemporal en economías finitas

En esta sección establecemos el problema de arbitraje intertemporal apropiado y derivamos los resultados de representación correspondientes para economías finitas. Entendemos que una economía finita posee un número finito de activos, un número finito de períodos discretos para los cuales puede llevarse a cabo actividad económica y un número finito de estados posibles en cada período. Como antes, hacemos el supuesto simplificador de que el *conjunto* de estados posibles es uniforme, esto es, que el espacio de estados es el mismo en cada período. En economías finitas no hay pérdida de generalidad al hacer este supuesto [8]. La notación que usaremos en esta sección es la siguiente:

t, $\tau = 0,1,\ldots,T$ = índice para las fechas, donde $T < \infty$.

$\Omega = \{1,2,\ldots,S\}$ = El conjunto (estacionario) de posibles estados en cada fecha; suponemos que S es finito. (Es decir, cada estado diferente en cada fecha se distingue individualmente.)

[8] Si existe un conjunto diferente de estados en cada período, simplemente formamos la unión de estos conjuntos, el cual también debe ser finito.

$P_t = [p_{sj}]_t$ = La matriz de precios condicionados en el período t; esto es, la entrada en la fila s y la columna j representa el precio del activo j en el estado $s \in \Omega$ en el período t.
$D_t = [d_{sj}]_t$ = La matriz de dividendos condicionada en el período t; nuevamente las filas corresponden a los estados y las columnas a los activos.
$x = [x_j]$ = un vector columna que representa la posición de cartera, en donde el elemento j representa la cantidad de activo j mantenida en la cartera.
${}_tK_\tau$ = Es una matriz de precios implícitos entre los períodos t y $\tau \geqslant t$, en donde las filas de la matriz representan los estados en el período t y las columnas representan los estados en el período τ. Debido al supuesto de uniformidad de Ω, la matriz ${}_tK_\tau$ es cuadrada con S filas y columnas.

La versión intertemporal de la condición de no arbitraje, utilizando la notación de vectores y matrices mencionada antes, es la siguiente [9]:

DEFINICION 1 (No-Arbitraje intertemporal): Dada una economía finita, si para cada período (presente) t y períodos (futuros) $\tau > t$, no existe ningún vector de carteras tal que

$$P_t x < 0$$

y

$$D_{t+1} x \geqslant 0,$$

$$\ldots$$

$$D_{\tau-1} x \geqslant 0,$$

$$\{P_\tau + D_\tau\} x \geqslant 0, \qquad \text{(NA-IT)}$$

entonces la economía está intertemporalmente libre de arbitraje.

(La convención para desigualdades de matrices es: «$>$ 0» significa estrictamente positiva, o sea, todos y cada uno de los elementos de la matriz o vector mencionados antes son positivos; «$>$ 0» significa positivo, lo cual quiere decir que algunos elementos podrían ser cero, pero al menos uno es positivo; y «$\geqslant$ 0» significa no negativa, o que todos los elementos son no negativos.)

Del lema de Farkas se concluye inmediatamente que existen matrices cuadradas no negativas ${}_tK_\tau$ tales que el resultado de representación

$$P_t = \sum_{m=t+1}^{\tau} {}_tK_m D_m + {}_tK_\tau P_\tau \tag{1}$$

se cumple para cualquier elección particular de $\tau \geqslant t$. Sin embargo, ahora iremos más lejos considerando todos los $\tau \geqslant t$ simultáneamente y postulando la existencia de un *conjunto* de matrices de precios implícitos $\{{}_tK_\tau\}$, el cual posee además la propiedad de «evolución», mediante una definición alternativa:

DEFINICION 2 (Ley del precio único e intertemporal): Si existe un conjunto de matrices de precios implícitos no negativas $\{{}_tK_\tau\}$ para las cuales

$$P_t = \sum_{m=t+1}^{\tau} {}_tK_m D_m + {}_tK_\tau P_\tau \qquad \text{(R-IT)}$$

[9] Véase el apéndice para una versión ligeramente más fuerte de no-arbitraje intertemporal.

y, además, las matrices ${}_tK_\tau$ poseen la propiedad de *evolución* tal que

$${}_tK_\tau = {}_tK_v\,{}_vK_\tau \text{ para todo } t \leqslant v \leqslant \tau,$$

entonces la economía satisface la *ley intertemporal del precio único.*

Ahora presentamos nuestro resultado central de economías finitas:

TEOREMA 1 (Sistemas evolutivos no negativos): Una economía finita está libre de arbitraje intertemporalmente si y sólo si satisface la ley intertemporal del precio único.

Prueba de que la definición 1 implica la definición 2. Esto se obtiene directamente del hecho que (R-FM) implica (NA-FM) para todas las elecciones de períodos aplicando el lema de Farkas a cada combinación individual de períodos.

Prueba de que la definición 2 implica la definición 1. Esta prueba se puede desarrollar mejor mediante el siguiente lema, el cual tiene intuición por sí mismo:

LEMA 1 (Arbitraje local): Si es posible hacer arbitraje entre los períodos previos y posteriores a un período intermedio de intercambio, entonces el arbitraje es posible entre uno de estos períodos y la fecha intermedia de intercambio.

Prueba del lema. Supongamos lo contrario: el arbitraje es imposible en los períodos sucesivos que comprenden un período largo, pero el arbitraje es posible en el período largo. Sea $u < v < w$ los períodos inicial, intermedio y final, respectivamente, de intercambio. Debido a la ausencia de arbitraje, se sigue que (1) se utiliza para cada subperíodo individualmente. Por lo tanto tenemos

$$P_u = \sum_{m=u+1}^{v} {}_uK_mD_m + {}_uK_vP_v \tag{2}$$

y

$$P_v = \sum_{m=v+1}^{w} {}_vK_mD_m + {}_vK_wP_w \tag{3}$$

Sustituyendo (3) en (2) tenemos

$$P_u = \sum_{m=u+1}^{v} {}_uK_mD_m + \sum_{m=v+1}^{w} {}_uK_{vv}K_mD_m + {}_uK_{vv}K_wP_w \tag{4}$$

Suponemos que ${}_uK_m \equiv {}_uK_{vv}K_m$, $m = v + 1,...,w$. Es evidente que estas matrices son no negativas ya que son el resultado del producto de matrices no negativas. Utilizando esta definición es claro que (4) es un teorema de representación de la forma (R-IT) entre los períodos u y w. En consecuencia, aplicando el teorema de Farkas a la inversa, no puede haber arbitraje entre los períodos u y w, contradiciendo nuestro supuesto original. Esto concluye la prueba del lema. ■

Volvamos a la parte final de la prueba de nuestro teorema original: no arbitraje intertemporal implica la ley intertemporal del precio único. Aquí sólo necesitamos resaltar la naturaleza constructiva de la prueba del lema de arbitraje local. Es decir, supongamos que el arbitraje está prohibido entre todos los períodos adyacentes;

entonces todas las matrices de precios implícitos, ${}_0K_1$, ${}_1K_2$,..., ${}_{T-1}K_T$ existen y son no negativas. Por lo tanto podemos construir todas las matrices de precios implícitos de dos períodos: ${}_0K_2 \equiv {}_0K_{11}K_2$, ${}_1K_3 \equiv {}_1K_{22}K_3$, etc. Estas matrices son no negativas y se ha demostrado que evitan el arbitraje. Por lo tanto podríamos construir matrices de tres períodos, etc.; la ley asociativa de producto de matrices asegura la unicidad de la construcción, dada la matriz de un período. Por definición, un conjunto de matrices (más generalmente, operadores) $\{{}_uK_w\}$ tal que ${}_uK_w = {}_uK_{vv}K_w$ para todo u $\leqslant$ v $\leqslant$ w (y que incluye ${}_uK_u$ = I, la matriz identidad) se le denomina *sistema evolutivo*.

Esto termina la prueba del Teorema 1. ■

Por el momento dos corolarios son inmediatos.

COROLARIO 1. (Arbitraje miope). Definamos dos fechas de intercambio como «adyacentes» si no hay otra fecha de intercambio entre ellas. Por inducción finita, podríamos aplicar el lema 1 para demostrar que sí es posible hacer arbitraje sobre un número de períodos de intercambio, es posible hacer arbitraje entre, al menos, dos fechas de intercambio adyacentes; por el contrario, si el arbitraje ha sido eliminado entre todos los períodos adyacentes, entonces ha sido eliminado por completo. De esta forma, para saber si hay arbitraje sólo necesitamos mirar el siguiente período de intercambio para asegurar los beneficios del arbitraje, en caso de que los haya.

A pesar de su simpleza, este corolario representa la esencia del Lema del Arbitraje Local: en una economía finita, una restricción repetida de no arbitraje «miope» asegura una restricción global de no arbitraje. Como un comentario relacionado, nos podemos dar cuenta que la estrategia de cartera «x» contemplada en (NA-IT) es fija, lo cual, representa una estrategia de «compra y guarda». ¿Tiene algún sentido investigar las estrategias de cartera dinámicas (es decir, contingentes) como posibles oportunidades de enriquecerse mediante el arbitraje? La respuesta es negativa:

COROLARIO 2. (Arbitraje de compra y guarda). Ya que el no arbitraje local implica no arbitraje global y debido a que todas las estrategias son necesariamente «compra y guarda» entre períodos de intercambio adyacentes, las estrategias de arbitraje «dinámicas» no agregan nuevas posibilidades de arbitraje en una economía finita.

Ahora distinguiremos una clase especializada de economías finitas:

DEFINICION 3. (Economías estacionarias). Si una economía finita intertemporal libre de arbitraje posee un sistema evolutivo de precios implítico $\{{}_tK_\tau\}$ con ${}_tK_\tau = {}_{t'}K'_{\tau'}$, siempre y cuando $(t - \tau) = (t' - \tau') \leqslant 0$ (es decir, los precios implícitos son una función sólo del tiempo entre los períodos), entonces la economía se llama *estacionaria*.

Es decir, la matriz de precios implícitos para una economía estacionaria sólo depende del período de tiempo que pasa entre la fecha en que ocurre el pago y la fecha en que ha sido valorado. De esta forma tenemos el siguiente corolario adicional:

COROLARIO 3. (Propiedad de semigrupo). En una economía finita, estacionaria, intertemporalmente libre de arbitraje, las matrices de precios implícitos $\{{}_tK_\tau\}$ del teorema 1 forman un *semigrupo* de operadores.

Esto se sigue de la definición de semigrupo, un sistema evolutivo bajo condiciones de estacionariedad. (El semigrupo no es necesariamente un grupo, ya que las matrices de precios implícitos no necesitan poseer inversa). El supuesto de estacionariedad permite numerosas simplificaciones, las cuales se utilizan por completo más adelante [10]. Por ejemplo, es claro que un semigrupo está especificado por completo mediante la estructura de precios implícitos entre los períodos adyacentes, es decir, ${}_tK_{t+1} = K$ (en ocasiones se dice que K *genera* el semigrupo), y que ${}_tK_\tau = K^{\tau - t}$.

Concluimos esta sección con algunos comentarios aclaradores e ilustramos éstos con un ejemplo. En primer lugar se debe observar que, hablando en términos generales, las matrices de precios implícitos desempeñan, para economías con incertidumbre, el mismo papel que desempeñan las tasas de descuento en economías con certidumbre. En economías con incertidumbre, la propiedad de evolución es bien conocida bajo el nombre de propiedad de «estructura temporal». Por ejemplo, es ampliamente reconocido que una tasa de descuento de cinco períodos debe ser el producto de tasas de descuento sucesivas de dos y tres períodos con el fin de evitar el arbitraje. En esta sección sólo hemos puesto las matrices de precios implícitos de economías finitas con incertidumbre sobre un mismo fundamento: una matriz de precios implícitos de cinco períodos se obtiene del producto de matrices de dos y tres períodos. Debe señalarse, a continuación, que nuestra discusión sobre matrices de precios implícitos sólo involucra existencia, y no unicidad. Debida a que los mercados podrían ser «incompletos», como se discutió en la sección anterior, los sistemas evolutivos correspondientes a las matrices de precios implícitos podrían no ser únicos; múltiples sistemas evolutivos podrían resolver (R-IT) cuando no hay arbitraje, en el sentido de (NA-IT). Finalmente, debe señalarse que en un mercado de activos incompleto, también podría haber soluciones no negativas a (R-IT), lo cual no constituye un sistema evolutivo. Si esto es así, sin embargo, el arbitraje se ha evitado y por lo tanto también debe existir un sistema evolutivo que resuelve (R-IT). Estos aspectos se ilustran con el primer ejemplo.

Ejemplo 1. Suponga que hay tres períodos, 0, 1, 2, con dos estados en cada período. Además, suponga que sólo existe una acción, y que su precio condicionado y la matriz de dividendos están dadas (exógenamente):

$$P_0 = \begin{bmatrix} 300 \\ 240 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 250 \\ 210 \end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix} 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

y

$$D_1 = \begin{bmatrix} 200 \\ 90 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 100 \end{bmatrix}$$

Se puede verificar rápidamente que el conjunto de matrices de precios implícitos

$${}_0J_1 \equiv \begin{bmatrix} .20 & .70 \\ .40 & .20 \end{bmatrix}, \quad {}_1J_2 \equiv \begin{bmatrix} .80 & .30 \\ .60 & .30 \end{bmatrix} \quad {}_0J_2 \equiv \begin{bmatrix} .31 & .45 \\ .11 & .40 \end{bmatrix}$$

resuelve las tres ecuaciones representativas $P_0 = {}_0J_1D_1 + {}_0J_1P_1$, $P_0 = {}_0J_1D_1 + {}_0J_2D_2 + {}_0J_2P_2$, y $P_1 = {}_1J_2D_2 + {}_1J_2P_2$. Sin embargo, también es claro que $\{{}_0J_1, {}_1J_2, {}_0J_2\}$ no puede constituir un sistema evolutivo, ya que ${}_0J_2 \neq {}_0J_1{}_1J_2$. Sin embargo, la existencia de estas matrices de precios implícitos y el hecho de que sean positivas asegura la

[10] Véase Garman (1985) para una discusión de las implicaciones y conjeturas concernientes a la determinación de precios en semigrupos en tiempo continuo.

ausencia de oportunidades de arbitraje. También se garantiza, en consecuencia, por el teorema 1 que al menos una de las estructuras implícitos de precios que tiene la propiedad evolutiva existe, por ejemplo

$$ {}_0K_1 = \begin{bmatrix} .40 & .40 \\ .20 & .50 \end{bmatrix}, \ {}_1K_2 = \begin{bmatrix} .50 & .50 \\ .30 & .50 \end{bmatrix}, \ {}_0K_2 = \begin{bmatrix} .32 & .40 \\ .25 & .35 \end{bmatrix} $$

Se puede demostrar que estas matrices solucionan las ecuaciones representativas y que poseen la propiedad de sistema evolutivo.

3. Valoración Markov de los activos

En esta sección caracterizaremos el precio libre de arbitraje de un activo como el valor esperado condicionado de sus pagos futuros dado el valor presente de un proceso de Markov. Esto ofrece un fundamento para los procedimientos de test estadístico que se basan en supuestos de distribución markoviana, y para resultados teóricos como la caracterización de tasas de interés de largo plazo hecha por Dybvig, Ingersoll y Ross (1985). Como en las secciones anteriores, suponemos una economía finita para más tarde generalizar los resultados.

En primer lugar revisamos brevemente la caracterización de los procesos de Markov $X = \{X_0, X_1, ..., X_T\}$ con espacio de estados $\Omega = \{1, 2, ..., S\}$ en términos de su operador de transición $\{{}_t\Pi_\tau\}$, donde, para períodos t y $\tau > 1$, ${}_t\Pi_\tau$ es una matriz positiva $S \times S$ para la cual las filas suman 1. El elemento (i, j) de ${}_t\Pi_\tau$ es la probabilidad de que $X_\tau = j$ dado que $X_t = i$. Para que X sea Markov, las matrices deben satisfacer la ecuación de Kolmogorov-Chapman

$$ {}_t\Pi_\tau = {}_t\Pi_{ss}\Pi_\tau \tag{5} $$

para cualquier $t \leqslant s \leqslant \tau$. Si f es cualquier función en Ω, es decir el pago de la acción en el período τ, podemos igualmente tratar a f como un vector en R^s y obtener la relación

$$ E[f(X_t) \mid X_t = s] = [{}_t\Pi_\tau f]_s $$

o en forma vectorial

$$ E[f(X_t) \mid X_t] = {}_t\Pi_\tau f \tag{6} $$

Ahora suponemos, como en la sección anterior, que $D_1, D_2, ..., D_T$ y $P_0, P_1, ..., P_T$ son matrices $S \times J$ que representan los precios y dividendos de J acciones dadas en cada período $t = 0, 1, 2, ..., T$. Sea $p_{jt}(s)$ el elemento (s, j) de P_t, o el precio de la acción j en el período t en el estado s, y de la misma forma $d_{jt}(s)$.

DEFINICION 4 (Condición de crecimiento de activos). La secuencia de precios y dividendos $\{P_t, D_t\}$ satisface la *condición de crecimiento de activos* si, para cada período t y cada acción j

$$\max_s |p_{jt}(s)| \leqslant \max_s |p_{jt+1}(s) + d_{jt+1}(s)| \tag{7}$$

Esto es, la condición de crecimiento de los activos significa que independientemente de lo que se obtiene en el estado actual, no se necesita invertir para más en cualquier acción que lo que uno podría recibir de ella en el siguiente período. Ahora presentaremos dos definiciones más, con el fin de mostrar la relación existente entre la condición de crecimiento de los activos y la no negatividad de las tasas de interés.

DEFINICION 5. (Activos sin riesgo). Si para cada período t y cada estado s existe una cartera para la cual el pago del siguiente período es $1 \equiv (1, 1,...,1) \in R^s$, entonces decimos que en la economía *reside un activo sin riesgo.*

DEFINICION 6. (Impaciencia). Si las matrices de precios implícitos $\{_tK_\tau\}$ de una economía pueden elegirse de tal forma que

$$1 \geqslant {}_tK_\tau 1 \text{ para todo } t \text{ y } \tau \geqslant t \tag{8}$$

entonces decimos que la economía exhibe *impaciencia.*

LEMA 2 (No Negatividad de las Tasas de Interés). Si una economía libre de arbitraje intertemporalmente exhibe impaciencia, entonces satisface la condición de crecimiento. Si en una economía libre de arbitraje intertemporalmente reside un activo sin riesgo y satisface la condición de crecimiento, entonces exhibe impaciencia.

Prueba. En primer lugar demostramos que (8) implica (7): de la ausencia de arbitraje intertemporal tenemos números no negativos tales que ${}_tK_{t+1} = [k_t(s, s')]$ tal que

$$p_{jt}(s) = \sum_{s'} k_t(s, s') \{P_{jt+1}(s') + d_{jt+1}(s')\}$$

para todo j y s. En consecuencia,

$$\begin{aligned} |p_{jt}(s)| &= |\sum_{s'} k_t(s, s') \{p_{jt+1}(s') + d_{jt+1}(s')\}| \\ &= \sum_{s'} |\{p_{jt+1}(s') + d_{jt+1}(s')\}| k_t(s, s') \\ &\leqslant \max_{s'} |\{p_{jt+1}(s') + d_{jt+1}(s')\}| \sum_{s'} k_t(s, s') \\ &\leqslant \max_{s'} |\{p_{jt+1}(s') + d_{jt+1}(s')\}| \end{aligned}$$

Como la desigualdad se cumple para toda s, (8) implica (7).

Ahora supongamos que la condición de crecimiento (7) se cumple y que en la economía reside un activo sin riesgo. Debido a (7)

$$\max \ \delta_t(s) \leqslant 1$$

donde el lado derecho es el pago del activo sin riesgo y el lado izquierdo es el precio del activo sin riesgo. En términos vectoriales esto implica que

$$\delta_t \leqslant 1,$$

ya que la desigualdad se debe cumplir para todos los estados s. Debido a la ausencia de arbitraje intertemporal, tenemos precios implícitos $\{_tK_{t+1}\}$ tales que

$$\delta_t = {}_tK_{t+1}\, 1.$$

Combinando estas dos últimas ecuaciones demostramos (8). ■

Ya que $[1/({}_sK_\tau 1)_s] - 1$ es la tasa de interés implícitos para los activos sin riesgo que se compraron en el período t con estado s, la segunda parte del lema se puede interpretar así: impaciencia implica tasas de interés no negativas siempre y cuando dichas tasas estén bien definidas mediante la presencia de activos sin riesgo. Sin embargo, la impaciencia es una propiedad en cierto sentido fuerte, en la medida que provee una condición de «contracción» sobre los precios implícitos incluso cuando no hay activos sin riesgo.

Las matrices $\{_tK_\tau\}$ no negativas que satisfacen la propiedad evolutiva (conocida en teoría de la probabilidad como *condición de Chapman-Kolmogorov)* así como la relación (8) se conocen como *operadores de transición sub-Markovianos*. Estos operadores pueden representar la probabilidad de transición de un proceso de Markov X el cual también puede «terminar» con probabilidad diferente de cero. Es conveniente asociar un nuevo *«cementerio» de estados* † al espacio de estados original Ω y suponer que dicho proceso de Markov es «capturado» por el cementerio de estados cuando se acaba. Es decir, sea $\Omega^\dagger \equiv \Omega \cup \dagger$ y, para cada t y $\tau \geqslant t$, sea

$$_t\Pi_\tau = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 - {}_tK_\tau 1 & {}_tK_\tau \end{bmatrix} \tag{9}$$

Entonces, podemos extender sin problema la definición de $\{P_t, D_t\}$ a $\Omega^\dagger$ de tal forma que $p_{jt}(\dagger) = d_{jt}(\dagger) = 0$ para todo j y t, para establecer el siguiente teorema de representación sobre la valoración de activos libres de arbitraje intertemporal.

TEOREMA 2. (Valoración Markov). Supongamos que una economía libre de arbitraje intertemporal exhibe impaciencia. Entonces existe un proceso de Markov $X \equiv (X_0, X_1,\dots,X_T)$ (con espacio de estados †) tal que, para cualquier acción j y períodos t, $\tau \geqslant 0$,

$$P_{jt}(X_t) = E\Big[\sum_{m=t+1}^{\tau} d_{jm}(X_m) + p_{j\tau}(X_\tau) | X_t\Big] \tag{10}$$

Prueba. Por el teorema 1 y el lema 2 existen matrices de precios implícitos no negativas $\{_tK_\tau\}$ que satisfacen (R-IT), la ecuación (5) de Chapman-Kolmogorv, así como la propiedad de sub Markov (8). Al incorporar el cementario de estados † de la discusión anterior, usando (8) podemos extender $\{_tK_\tau\}$ a las correspondientes matrices de transición de Markov $\{_t\Pi_\tau\}$ para algún proceso de Markov X. De esta forma (10) se obtiene de (R-IT) y (6).■

Obviamente la fórmula de determinación de precios de Markov (10) también se cumple sin incorporar un cementerio de estados si se considera a X como un subproceso de Markov. En este caso, el descuento temporal está implícito en la probabilidad de que X no sobreviva.

Ejemplo 2. Ahora extendemos el ejemplo 1 para construir un proceso de valoración de Markov. Recordemos que la estructura de precios implícitos con la propiedad evolutiva estaba dada por

$$ {}_0K_1 = \begin{bmatrix} .40 & .40 \\ .20 & .50 \end{bmatrix}, \quad {}_1K_2 = \begin{bmatrix} .50 & .50 \\ .30 & .50 \end{bmatrix}, \quad {}_0K_2 = \begin{bmatrix} .32 & .40 \\ .25 & .35 \end{bmatrix} $$

Los operadores de transición de Markov correspondientes son

$$ {}_0\Pi_1 = \begin{bmatrix} 1.00 & .00 & .00 \\ .20 & .40 & .40 \\ .30 & .20 & .50 \end{bmatrix}, \quad {}_1\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & .00 & .00 \\ .00 & .50 & .50 \\ .20 & .30 & .50 \end{bmatrix}, \quad {}_0\Pi_2 = \begin{bmatrix} 1.00 & .00 & .00 \\ .28 & .32 & .40 \\ .40 & .25 & .35 \end{bmatrix} $$

se puede verificar fácilmente que ${}_0\Pi_{11}\Pi_2 = {}_0\Pi_2$. Las tasas de interés se determinan examinando los elementos fuera de la diagonal de la primera columna de las matrices Π, los cuales se denominan «tasas aniquiladoras» del proceso de Markov. De esta forma, la tasa de interés en el estado y el período está directamente relacionada a la correspondiente tasa aniquiladora; por ejemplo, la tasa de interés entre el estado y en el período 0 y el período 2 es la tasa aniquiladora dividida, la diferencia entre la misma tasa y 1.00 sobre los dos períodos, es decir, $.28/(1 - .28) = .389$.

Podría señalarse que la fórmula de valoración de Markov (10) es menos general que el modelo de valoración de medida martingala de Harrison y Kreps (1979), sin embargo presenta una estructura de determinación de precios más específica. En nuestro contexto, la existencia de una medida de martingala del tipo Harrison-Kreps implica, para períodos t y $\tau \geqslant 1$ y alguna acción j, que existe un operador de expectativas E^* tal que

$$ P_t = E^* \left[\sum_{m=t+1}^{\tau} D_m + P_\tau | F_t \right] \tag{11} $$

donde F_t es el conjunto de información (σ-álgebra de la información) en el período t. No hay nada en (11) que sugiera la existencia de un proceso de Markov que satisfaga (10). Es más, incluso si $P_{jt}(\ )$ y $d_{jt}(\ )$ son funciones de un proceso de Markov $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ dado exógenamente, en general *no* se dará el caso que Y pueda retener la propiedad de Markov al cambiar a una medida martingala inherente a (11). Por ejemplo, si Y es un proceso con tres estados con $T = 4$ y dos acciones, una con riesgo y otra un numerario sin riesgo. Exceptuando el arbitraje, podemos construir una medida martingala tal que (11) se cumpla, pero con la propiedad de que las probabilidades de transición en el período 3 para Y_4 dependen de Y_2, contradiciendo la propiedad de Markov. Es evidente que también podemos construir probabilidades de transición de Markov dada una determinación de precios neutral al riesgo; este es el aspecto importante del teorema 2. También debe señalarse que, por el teorema 2, no necesitamos suponer la existencia de un numerario sin riesgo, o algún otro precio normalizado. En el modelo de Harrison-Kreps, el descuento temporal está implícito en la normalización de un numerario expandido a todos los períodos; en contraste, el modelo de valoración de Markov tiene descuento temporal implícito en la probabilidad de supervivencia del proceso sub Markov de «determinación de precios». Esta generalidad tiene un costo: debemos suponer que los precios dados para las acciones y los pagos son independientes temporalmente, o que sólo son funciones del estado vigente, y no (además) de la trayectoria histórica de los estados. El que este costo sea importante o no depende de la dificultad de redefinir los estados, con el fin de transformar una estructura temporalmente dependiente en una independiente similar, lo cual es un procedimiento específico [11].

4. **Análisis transformado del caso estacionario**

Supongamos que las matrices de precios implícitos $\{{}_tK_\tau\}$ para una economía libre de arbitraje intertemporal y que presenta impaciencia están generadas por una matriz K constante de un período. Por lo tanto tenemos, para cualquier período t y $\tau \geqslant 1$

$$P_t = \sum_{m=1}^{\tau-1} K^m D_{t+m} + K^{\tau-1} P_\tau \qquad (12)$$

Ahora emplearemos transformaciones-z para una solución analítica conveniente de (12). Para cualquier sucesión sub-geométrica (acotada) $F \equiv (F_1, F_2, \ldots)$, sea $\hat{F}$ la transformación-z de F, la cual definimos como

$$\hat{F}(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n F_n, \quad 0 \leqslant z < 1$$

Hay una correspondencia uno a uno entre las sucesiones F y sus transformaciones-z $\hat{F}$. Llamamos a F la *transformación inversa* de $\hat{F}$. (Se pueden consultar tablas estándar para los valores de la transformación-z). Después de algunas manipulaciones, la definición de transformación-z nos dice que la sucesión $F_n \equiv K^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, tiene como transformación-z $\hat{F}(z) = (I - zK)^{-1}$. Para una acción que paga un vector de dividendos constantes $d \equiv d_{jt} = (d_1, d_2, \ldots, d_s)$ también queremos calcular la suma $\sum_{m=1}^{n} K^m d$, y podemos hacer uso de la transformación-z $\hat{G}$ de $G(n) = \sum_{m=0}^{n-1} K^m$. Después de algunas sustituciones, obtenemos

$$\hat{G}(z) = \frac{z}{1-z}(I - zK)^{-1}$$

Ejemplo 3. Supongamos que la estacionariedad se cumple de forma tal que

[11] Como nota histórica, la noción de que el precio de una acción puede considerarse como sus pagos futuros esperados bajo ciertas probabilidades, se remonta a Arrow (1953).

$$ {}_tK_{t+1} = K = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} $$

Factorizando tenemos que

$$ (I - zK)^{-1} = \frac{1}{[(1 - z/6)(1 - 2z/3)]} \begin{bmatrix} 1 - z/3 & z/6 \\ z/3 & 1 - z/2 \end{bmatrix} $$

Aplicando una expansión de fracciones parciales, obtendremos

$$ (I - zK)^{-1} = \frac{1}{(1 - 2z/3)} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} + \frac{1}{(1 - z/6)} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} $$

Sea $\hat{F}(z) = (I - zK)^{-1}$. Observe que la inversa de la transformación-z de $1/(1 - \alpha z)$ es α^n, con lo cual tenemos la transformación inversa

$$ F(n) = (2/3)^n \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} + (1/6)^n \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} $$

Como pedíamos, $K^n = F(n)$ para todo $n \geqslant 1$. Una cartera que paga a $\equiv (-3, 9)'$ dentro de n períodos se valúa actualmente a

$$ (2/3)^n \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (1/6)^n \begin{bmatrix} -4 \\ 8 \end{bmatrix} $$

Sea $G(n) = \sum_{m=0}^{n-1} K^m$. Entonces

$$ \hat{G}(z) = \frac{z}{(1 - z)} (I - zK)^{-1} = $$

$$ = \frac{z}{[(1 - z)(1 - z/6)]} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \frac{z}{[(1 - z)(1 - 2z/3)]} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} $$

Nuevamente, utilizando la expansión de fracciones parciales

$$ \hat{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{6/5}{1-z} & \frac{-6/5}{1-z/6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & -1/3 \\ -2/3 & 2/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3}{1-z} & \frac{-3}{1-z/6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{bmatrix} $$

Utilizando la transformación inversa y distribuyendo las constantes

$$G(n) = 1 - (1/6)^n \begin{bmatrix} 2/5 & -2/5 \\ -4/5 & 4/5 \end{bmatrix} + 1 - (2/3)^n \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Supongamos que una cartera dada paga el vector de dividendos $d = (3, 12)'$ en el período n, tomando en cuenta el período actual. El valor de mercado de la cartera con dividendo está dado por

$$G(n)d = \begin{bmatrix} 72/5 \\ 126/5 \end{bmatrix} + (1/6)^n \begin{bmatrix} 18/5 \\ -35/5 \end{bmatrix} - (2/3)^n \begin{bmatrix} 18 \\ 18 \end{bmatrix}$$

5. **El caso estacionario de horizonte infinito**

Consideremos de nuevo el caso estacionario ${}_tK_{t+1} = K$ para toda t, lo cual nos da la relación de determinación de precios (12). Más aún, ahora supondremos *impaciencia estricta*, en el sentido que (8) se cumple con desigualdad estricta. En consecuencia, la matriz de precios implícitos K puede escogerse de tal forma que sea «estrictamente contractiva», lo cual quiere decir que todas sus filas suman estrictamente menos que uno. La impaciencia estricta también implica que $K^m \to 0$ cuando $m \to \infty$. Ahora consideraremos una acción cuyos vectores de precios y dividendos, p y d, son independientes del tiempo. (Esto podría pensarse como una acción «perpetua» que siempre paga el mismo dividendo, dado el estado; está claro que dicho dividendo podría ser dependiente del estado). Como (12) implica que

$$p = \sum_{m=1}^{n} K^m d + K^n p$$

para todo $n \geqslant 1$, podemos dejar que $n \to \infty$, obteniendo

$$p \sum_{m=1}^{\infty} K^m d = Gd$$

donde $G = \sum_{m=1}^{\infty} K^m$. Por un cálculo de series bien conocido sabemos que $G = (I - K)^{-1} - I$, donde I es la matriz identidad $S \times S$. La impaciencia estricta implica la convergencia de esta serie, lo cual provee una valoración de todas las acciones «perpetuas».

Ejemplo 4. Consideremos nuevamente del ejemplo 3

$$K = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

Lo cual implica

$$(I - K)^{-1} - I = \begin{bmatrix} 7/5 & 3/5 \\ 6/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Supongamos que una acción siempre paga un dividendo de 1 en el estado 1, y 2 en el estado 2, o $d = (1, 2)'$. Entonces

$$p = [(I - K)^{-1} - I]\, d = \begin{bmatrix} 7/5 & 3/5 \\ 6/5 & 4/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13/5 \\ 14/5 \end{bmatrix}$$

Si los precios de las acciones se calculan con el dividendo en vez de sin dividendo, tenemos que $p = (I - K)^{-1}d$. La matriz $(I - K)^{-1}$ es conocida como el *operador potencial* correspondiente [12] al semigrupo $\{K^m\}$.

Para el tipo de resultados explorados por Dybvig, Ingersoll y Ross (1985), en donde el proceso de valoración de Markov debe satisfacer una condición «combinada», podríamos necesitar que los operadores de transición de X fuesen estrictamente positivos. Una condición suficiente de «arbitraje no estricto» se presenta en el apéndice.

6. Un ejemplo

Considere una economía del siguiente tipo. El proceso de Markov, el cual está determinado exógenamente, de S estados está gobernado por una matriz de transición estacionaria Π. Existen J acciones definidas por las funciones de dividendos $d = (d_1, d_2, \dots, d_J)$ en donde la acción j paga [13] $d_j(s) \geqslant 0$ en el estado t si Y_t está en el estado s, para cualquier t. De esta forma el consumo agregado es $C(s) = \sum_{j=1}^{J} d_j(s)$ en el estado s para cualquier período. Si restringimos al agente a vender en corto y a una restricción presupuestaria, este agente es libre de mantener acciones en cantidades arbitrarias con el fin de maximizar la utilidad esperada del consumo. Suponiendo que este agente tiene una función de utilidad aditivamente separable, el problema de maximización es el siguiente:

$$Max \quad E\{\sum_{\tau=1}^{T} \varrho^{\tau-1} u(c_\tau) | Y_t\}$$

sujeto a las restricciones presupuestarias, de cartera y consumo, para todo t:

$$c_t \geqslant 0,\ b_{t+1} \geqslant 0$$
$$c_t + p'_t b_{t+1} \leqslant W_t$$
$$W_t \equiv b'_t[p_t + d(Y_t)]$$

[12] Véase Duffie (1985) para más resultados que conectan la teoría potencial con la valoración de activos.

[13] Los supuestos de dividendos no negativos y que la cartera de acciones sea no negativa pueden relajarse, pero es conveniente mantenerlos por lo pronto.

donde $0 < \varrho < 1$ es el factor de impaciencia temporal, u es una función diferenciable, estrictamente creciente y cóncava, c_t es el consumo corriente, b_{t+1} es la cartera de acciones vigente elegida en el período t para realizar en el período $t + 1$ y p_t es el vector de precios corriente de las acciones. Se puede demostrar fácilmente que existe un equilibrio para esta economía (de un solo agente) de la forma: $c_t = C(Y_t)$, $b_t = (1, 1, \ldots 1)$, y para todo t,

$$p_t = \frac{1}{u'(C(Y_t))} E\{ \sum_{\tau=t+1}^{T} \varrho^{\tau-t} u'(C(Y_\tau)) d(Y_\tau) | Y_t \}$$

Así, tenemos las siguientes matrices de precios implícitos

$$_tK_\tau = A\Pi^{\tau-t}\varrho^{\tau-t}A^{-1}$$

donde A es la matriz diagonal $S \times S$ cuyo elemento s de la diagonal es $u'(C(s))$. Este ejemplo arroja determinación de precios estacionaria, como en el ejemplo 3, si $_tK_\tau = K = \varrho A\Pi A^{-1}$. Sin embargo, observamos que, en contraste con la versión de horizonte infinito de Lucas (1978), p_t no es una función constante de Y_t, sino que depende de la cantidad de tiempo restante. Sin embargo, tenemos lo que Lucas ha llamado la «ecuación estocástica de Euler»:

$$p_t = A^{-1}\varrho\Pi A(d + p_{t+1})$$

en donde p_t y d son tratadas como matrices $S \times J$ de una forma obvia.

Con el fin de utilizar los métodos de transformación-z a soluciones analíticas, definamos

$$\begin{aligned} V(T - t) &\equiv A(p_t - d) \\ q &\equiv Ad \end{aligned} \tag{14}$$

de tal forma que $V(n)$ es el producto de la utilidad marginal y los precios (con dividendo) con n períodos por vencer. De esta forma tenemos

$$V(n + 1) = q + \varrho\Pi V(n), \; 1 \leqslant n \leqslant T \tag{15}$$

Si hacemos que $\hat{V}$ denote la transformación-z de V, tomando la transformación-z en ambos lados de (14) obtenemos

$$\frac{1}{z}[\hat{V}(z) - V(0)] = \frac{1}{1 - z} q + \varrho\Pi\hat{V}(z)$$

y después de algunas manipulaciones obtenemos

$$\hat{V}(z) = \frac{z}{1 - z}(I - \varrho z\Pi)^{-1}q + (I - \varrho z\Pi)^{-1}V(0)$$

También tenemos la condición de acotamiento $V(0) = q$, ya que $p_T = 0$. Esto ocasiona que

$$\hat{V}(z) = \hat{G}(z)q$$

donde $\hat{G}(z) \equiv \frac{z}{1 - z}(I - \varrho z\Pi)^{-1}$. Tomando la transformación-z inversa tenemos

$$V(n) = G(n)q$$

en donde G es la transformación inversa de $\hat{G}$. Finalmente, de (14)

$$p_t = A^{-1}V(T - t) - d = [A^{-1}G(T - t)\ A - I]d \tag{16}$$

Como un ejemplo numérico específico [14], supongamos que $\varrho = .5$ y que Y es un proceso de dos estados con matriz de transición

$$\Pi = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{bmatrix}$$

De acuerdo a la factorización y descomposición de fracciones parciales,

$$\hat{G}(z) = \frac{1}{1 - z}\begin{bmatrix} 28/9 & 10/19 \\ 8/9 & 30/19 \end{bmatrix} + \frac{1}{1 - z/2}\begin{bmatrix} -8/9 & -10/9 \\ -8/9 & -10/9 \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{1 - z/20}\begin{bmatrix} -100/171 & 100/171 \\ 80/171 & -80/171 \end{bmatrix}$$

Tomando la transformación inversa

$$G(n) = \begin{bmatrix} 28/19 & 10/19 \\ 8/19 & 30/19 \end{bmatrix} + \frac{1}{2^n}\begin{bmatrix} -8/9 & -10/9 \\ -8/9 & -10/9 \end{bmatrix} + \tag{17}$$

$$+ \frac{1}{20^n}\begin{bmatrix} -100/171 & 100/171 \\ 80/171 & -80/171 \end{bmatrix}$$

Supongamos que el consumo agregado es $C(1) = 4$ en el estado 1, $C(2) = 9$ en el estado 2 y que $u(c_t) = (c_t)^{.5}$. Entonces $u'(c_t) = .5(c_t)^{-.5}$ y

---

[14] Estos cálculos numéricos son de una aplicación diferente hecha por Howard (1960), págs. 78-79.

$$A = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}; \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

Si hacemos que el dividendo de una acción sea, digamos, $d_j = (4, 3)'$, podemos usar (16) muy fácilmente para calcular una solución analítica de p_{jt} para todas las fechas t, esto es

$$P_{jt} = \begin{bmatrix} 132/19 \\ 138/19 \end{bmatrix} + \frac{1^{T-t}}{2} \begin{bmatrix} -52/9 \\ -78/9 \end{bmatrix} + \frac{1^{T-t}}{20} \begin{bmatrix} -200/171 \\ 240/171 \end{bmatrix} - \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$$

Podríamos eliminar el último término para determinación de precios con dividendos, lo cual parece ser una convención más fácil de manejar en este tipo de modelos. Podemos observar que, cuando $T - t \to \infty$, el límite $P_{tj} \to (56/19, 81/19)'$. Este es, precisamente, el vector de precios prescrito en el modelo con horizonte infinito de Lucas. De esta forma, el modelo de Lucas escrito de forma matricial es

$$P = (A^{-1} G_\varrho A - I) D \tag{18}$$

donde

$$G_\varrho \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \varrho^t \Pi^t = (I - \varrho \Pi)^{-1}$$

es conocido como *operador «resolvente»*[15]. Para el ejemplo numérico mencionado

$$G_\varrho = \begin{bmatrix} 252/171 & 90/171 \\ 72/171 & 270/171 \end{bmatrix}$$

7. El espacio de estados general

En algunos casos el espacio de estados no puede pensarse razonablemente como finito. El espacio de estados podría incluir, por ejemplo, un continuo de tipos de capital en la economía. En esta sección extendemos nuestros resultados a un espacio de estados general (Ω, F, μ), donde F es una σ-álgebra de subconjuntos de Ω y μ es una medida σ-finita en (Ω, F). Un ejemplo típico sería tomar a R^n como Ω (o un subconjunto medible de R^n) con el usual subconjunto (de Borel) F y la medida común (de Lebesgue) μ. Esto permitiría manejar el caso de un vector de estados de dimensión n. Permitimos que el espacio de carteras L_t en cualquier período t sea un subespacio (posiblemente de dimensión infinita) de $L^\infty = L^\infty(\Omega, F, \mu)$, esto es, del espacio de funciones (clases de equivalencias) esencialmente acotadas y medibles de Ω. De esta forma, una cartera de pagos dada a en L_{t+1} es considerada como una variable aleatoria (acotada) que representa un pago de $a(\omega)$ en el estado $\omega \in \Omega$ en el período

[15] Véase Duffie (1985) para una exposición de las propiedades del operador «resolvent».

$t + 1$. Suponemos que hay la disponibilidad de pedir prestado sin riesgo en la forma de una cartera que tiene un pago $1 \in L_t$ para toda t, donde $1(\omega) \equiv 1$, para toda $\omega \in \Omega$. El precio de una acción $a \in L_{t+1}$ en el período t se representa como $V_t a$, y también es una variable aleatoria en L^∞, cuyo valor $[V_t a](\omega)$ en el estado ω representa el precio en el período t en el estado ω de un derecho a un pago a en el período $t + 1$. Por la definición de formación de cartera, L_{t+1} es un subespacio lineal de L^∞. Debido a la linealidad de los precios de la cartera y del supuesto de ausencia de arbitraje, V_t es un operador lineal (de L_{t+1} en L^∞). Adicionalmente, la ausencia de arbitraje implica que V_t sea un operador *positivo*, o $V_t x \geqslant 0$ siempre y cuando $x \geqslant 0$, el cual representamos por $V_t \geqslant 0$. (Recordemos nuestras convenciones sobre desigualdades de matrices.) Más formalmente, diremos que $\{V_t, t = 0, 1,...\}$ está *libre de arbitraje* si $V_t \geqslant 0$ para toda t.

La norma $||a||$ de una variable aleatoria a en L^∞ se define como el supremo esencial de $\{|a(\omega)|, \omega \in \Omega\}$. La norma de un operador lineal V en un subespacio lineal L de L^∞ se define como $||V|| \equiv sup \{||Va||; a \in L, ||a|| \leqslant 1\}$. Si $||V|| < \infty$, decimos que V es continua. El análogo en espacio de estados general a la condición de impaciencia en un espacio de estados finitos (8) es

$$||V_t|| \leqslant 1, \text{ para toda } t \tag{19}$$

Nuestra noción de matrices de precios implícitos $_tK_{t+1}$ en el caso de espacios de estados finitos se generaliza al concepto de un *operador de precios implícito* $_tK_{t+1}$: $L^\infty \rightarrow L^\infty$, un operador lineal positivo que extiende V_t a L^∞, lo que significa que $_tK_{t+1}a = V_t a$ para toda a en L_{t+1}. De la fórmula de valoración de Markov, nos gustaría que $_tK_{t+1}$ fuese una extensión que preserve la norma, es decir, $||_tK_{t+1}|| = ||V_t||$. La existencia de tal extensión se establece en el siguiente resultado de Duffie (1985).

LEMA 3 (Extensión de valuación). Supongamos que L es un subespacio lineal de L^∞ y $V: L \rightarrow L^\infty$ es un operador lineal continuo y positivo. Si $1 \in L$, entonces V tiene una extensión positiva y lineal que preserva la norma, $K: L^\infty \rightarrow L^\infty$.

Un proceso de sub Markov $X = \{X_0, X_1,...\}$ con espacio de estados (Ω, F, μ) está caracterizado por una colección de operadores lineales positivos $\{\Pi_0, \Pi_1,...\}$ con $||\Pi_t|| \leqslant 1$ para toda t, con la propiedad:

$$[\Pi_t f](s) = E\ [f(X_{t+1})|X_t = a] \tag{20}$$

para toda t y toda f en L^∞. Así, dado el lema de extensión previo, inmediatamente recuperamos el espacio de estados general análogo al teorema de valoración de Markov (2):

TEOREMA 3 (Valoración de Markov en un espacio de estados general). Supongamos que $\{V_0, V_1,...\}$ está libre de arbitraje y exhibe impaciencia (19). Entonces existe un proceso de sub Markov $X = \{X_0, X_1,...)$ tal que, para cualquier período t y $\tau \geqslant t$, y cualquier acción j,

$$p_{jt}(s) = E\ [\sum_{m=t+1}^{\tau} d_{jm}(X_m) + \grave{p}_{j\tau}(X_\tau)|X_t = s] \tag{21}$$

Comentario. Como en el caso de espacios de estado finitos, podemos tomar X como un proceso de Markov propio (en vez de un proceso sub) incorporando un cementario de estados † y llevando a cabo unos cuantos tecnicismos teóricos de teoría de la medida.

Prueba. De acuerdo a las condiciones impuestas sobre $\{V_t\}$ y el lema 3, existe una extensión $\{\Pi_t\}$ de $\{V_t\}$ positiva y lineal que preserva la norma. Sea X un subproceso de Markov con un operador de transición de un paso $\{\Pi_t\}$. Entonces (21) se obtiene de (20). ■

La relación (21) también se cumple para el caso de horizonte infinito.

Por la convergencia de la fórmula de determinación de precios

$$p_{jt}(s) = E\left[\sum_{m=t+1}^{\infty} d_{jm}(X_m) \mid X_t = s\right]$$

no necesitamos una condición adicional, por ejemplo *impaciencia estricta* $\|V_t\| \leqslant \epsilon < 1$ para toda t. En el caso estacionario con impaciencia estricta, tenemos que $p = Gd$, donde G es el operador exponencial asociado con una extensión de $V = V_t$ positiva y lineal que preserva la norma, $d \in L^{\infty}$ es la función de dividendos (del estado) pagados por la acción en cada período, y p es el precio de la acción, la cual también es una función del estado. Un análisis más extenso del caso con horizonte infinito estacionario se hace en Duffie (1985).

8. Conclusiones

Este trabajo adopta un punto de vista intertemporal sobre el arbitraje, lo cual genera implicaciones más allá de los resultados de representación estándar. En particular, encontramos que en una economía con estado y períodos finitos el no arbitraje como una condición local (esto es, entre períodos de intercambio adyacentes) implica la ausencia global de arbitraje. Más aún, tal ausencia de arbitraje existe si y sólo si existe un conjunto de precios implícitos no negativos que presentan la propiedad evolutiva. Una vez que la economía también exhibe impaciencia, estas matrices de precios implícitos representan un operador de transición sub-Markov bajo el cual los precios de las acciones son el valor esperado de los pagos futuros. Cuando agregamos un cementerio de estados al espacio de estados, obtenemos un proceso de Markov. Es decir, una economía finita libre de arbitraje intertemporal que exhibe impaciencia es un proceso de Markov en donde los valores de todas las acciones es su pago futuro esperado. Introducimos la transformación-z como un herramienta útil para calcular la valoración de las cantidades. También se presenta un ejemplo de equilibrio en la línea de Lucas (1978). Finalmente, extendemos el análisis a un marco de horizonte infinito y espacios de estado generales.

Apéndice: Arbitraje no estricto

Forzando de alguna manera la definición de no arbitraje, podríamos tomar las matrices $\{_tK_\tau\}$ de tal forma que fueran *estrictamente* positivas mediante la siguiente definición:

DEFINICIÓN 1' (No arbitraje estricto, intertemporal): Una economía finita está *estrictamente libre de arbitraje intertemporal* si, para cualquier cartera $x \in R^J$ satisfaciendo, para algún $\tau > t$,

$$D_{t+1}x \geqslant 0$$

$$\ldots$$

$$D_{\tau-1}x \geqslant 0$$

$$\{P_\tau + D_\tau\}x \geqslant 0$$

se cumple con desigualdad *estricta* para algún u con $t + 1 \leqslant u \leqslant \tau$, se sigue que $P_t x \gg 0$.

Restringido a marcos estáticos, la condición de no arbitraje estricto es equivalente a la condición de «no free lunch» (no comida gratis) para economías finitas establecida por Kreps (1981). En el caso intertemporal la contrapartida de la ley del precio único es

DEFINICION 2' (Ley del precio único estricta e intertemporal): Si existe un conjunto de matrices $\{{}_tK_\tau\}$ de precios implícitos estrictamente positivas para las cuales

$$\text{(R-IT)} \qquad P_t = \sum_{m=t+1}^{\tau} K_m D_m + {}_tK_\tau P_\tau$$

y, además, las matrices ${}_tK_\tau$ poseen la propiedad evolutiva

$${}_tK_\tau = {}_tK_{vv}K_\tau \text{ para todo } t \leqslant v \leqslant \tau$$

entonces la economía satisface la *ley del precio único estrica e intertemporal.*

El siguiente análogo al teorema 1 afirma la equivalencia entre las dos definiciones, lo cual se demuestra con el lema de Stiemke, un lema cercano al lema de Farkas. (Se podría agregar impaciencia estricta para satisfacer la convergencia en el caso de horizonte infinito.)

TEOREMA 4 (Sistemas evolutivos positivos): Una economía finita está estrictamente libre de arbitraje intertemporal si y sólo si se satisface la ley del precio único estricta e intertemporal. Más aún, existe un subproceso de Markov con operador de transición estrictamente positivo que satisface (10) bajo cualquiera de las condiciones adicionales:

i) La economía tiene un activo sin riesgo y exhibe impaciencia (tasas de interés no negativas); o

ii) La economía exhibe impaciencia estricta ((8) con desigualdad estricta).

Prueba. Por el lema de Stiemke (véase, por ejemplo, Mangasarian (1969, pág. 34), si la economía está libre de arbitraje intertemporal, las matrices de precios implícitos $\{{}_t\bar{K}_{t+1}\}$ pueden elegirse de tal forma que sean estrictamente positivas. Esto prueba la primera afirmación. Para la segunda, supongamos i), es decir, que hay activos sin riesgo e impaciencia. Entonces ${}_t\bar{K}_{t+1}1 \leqslant 1$ de acuerdo a la prueba del lema 2, y ya está demostrado. Alternativamente, supongamos ii), entonces podemos elegir matrices de precios implícitos $\{{}_t\bar{K}_{t+1}\}$ tales que

$$ {}_{t}K_{t+1}1 \ll 1 \text{ para toda } t \tag{22}$$

Para una $\alpha \in (0,1)$ lo suficientemente pequeña, tenemos que ${}_{t}\bar{K}_{t+1} \equiv \alpha_{t}\bar{K}_{t+1} + (1 - \alpha)_{t}\bar{K}_{t+1}$, lo cual satisface ${}_{t}\bar{K}_{t+1} \ll 1$ para toda t. De esta forma, $\{{}_{t}\bar{K}_{\tau} \equiv {}_{t}\bar{K}_{t+1} \ldots_{\tau} \; {}_{1}\bar{K}_{\tau}\}$ son matrices satisfactorias de precios implícitos que claramente satisfacen la propiedad evolutiva.■

En simples y llanos términos económicos, la definición 1′ admite arbitraje en el caso donde la definición 1 no lo hace: Supongamos que una cartera se puede comprar a cambio de nada y que aún así da un pago positivo en algún período futuro, sin embargo no es posible vender ninguna parte de este activo contingente a un precio diferente de cero. En este caso, el arbitraje debe reflejar la posibilidad de que la economía pueda valorar el activo con un precio cero debido a que el estado correspondiente se juzga imposible o catastrófico. (Considere el valor de un activo que paga 1$ si el mundo es destruido por completo; ¿comprar este activo a cambio de nada es una oportunidad de arbitraje?) En el caso de no arbitraje estricto, el teórico podría estar preocupado por una selección más cuidadosa del espacio de estados apropiado, en donde esto podría lograse con formas mucho más simples de evaluación consensual en el caso ordinario de no arbitraje. En economías finitas parece innecesaria la discusión teórica de este punto. Sin embargo, se puede conjeturar que, en analogía al tratamiento usual de los procesos estocásticos en tiempo continuo, es mucho más conveniente utilizar en economías en tiempo continuo operadores de valoración estrictamente positivos. Por esta razón, la definición alternativa de arbitraje presentada antes merece una consideración seria.

Bibliografía

ARROW, K., «Le Role des Valeurs Boursiers pour la Repartition la Meillure des Risques», *Econometrie* 41-41. Coloquio Internacional, Centre National de la Reserche Scientifique n.° 40 (1953). Traducido al inglés en *Review of Economic Studies*, 31 (1963), págs. 91-96.

BEJA, A., «Capital Markets with Delayed Learning», Disertación Doctoral, Stanford University, 1967.

—, «The Structure of the Cost of Capital Under Uncertainty», *Review of Economic Studies*, 38 (1971), págs. 359-368.

COX, J., y ROSS, S., «The Valuation of Options for Alternative Stochastic Process», *Journal of Financial Economics*, 3 (1976), págs. 145-166.

DUFFIE, D., «Price Operators: Extensions, Potentials, and the Markov Valuation of Securities», Research Paper n.° 813, Graduate School of Business, Stanfors University, 1985.

DYBVIG, P.; INGERSOLL, J., y ROSS, S., «Do Interest Rates Converge?», Documento de trabajo, Yale University, 1985.

GARMAN, M., «A General Theory of Asset Valuation under Diffusion State Processes», Documento de trabajo n.° 50, Research Program in Finance, University of California, Berkeley, 1977.

—, «Towards a Semigroup Pricing Theory», *Journal of Finance*, 40 (1985), págs. 847-861.

GARMAN, M., y OHLSON, J., «Information and the Sequential Valuation of Assets in Arbitrage-Free Economies», *Journal of Accounting Research*, 18, otoño 1980, págs. 420-440.

HARRISON, M., y KREPS, D., «Martingales and Arbitrage in Multiperiod Security Markets», *Journal of Economic Theory*, 20 (1979), págs. 381-408.

HOWARD, R., *Dynamic Programming and Markov Process*, Cambridge: The Massachusettes Institute of Technology, 1960.

KREPS, D., «Arbitrage and Equilibrium in Economies with Infinitely Many Commodities», *Journal of Mathematical Economics*, 8 (1981), págs. 15-35.

LUCAS, R., «Asset Prices in an Exchange Economy», *Econometrica*, 46 (1978), págs. 1429-1445.

MANGASARIAN, O., *Nonlinear Programming*, McGraw-Hill, New York, 1969.

ROSS, S., «Return, Risk and Arbitrage», Documento de trabajo, n.º 17-73a, University of Pennsylvania, 1973.

, «A Simple Approach to the Valuation of Risky Streams», *Journal of Business*, 51 (1978), págs. 453-475.

RUBINSTEIN, M., «The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options», *Bell Journal of Economics*, 7 (1976), págs. 407-425.